第二讲　中值定理的证明技巧

一、　考试要求

1、　理解闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理，有界性定理，介值定理），并会应用这些性质。

2、　理解并会用罗尔定理、拉格朗日中值定理、泰勒定理，了解并会用柯西中值定理。掌握这四个定理的简单应用（经济）。

3、　了解定积分中值定理。

二、　内容提要

1、　介值定理（根的存在性定理）

（1）介值定理　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

（2）零点定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$

2、　罗尔定理

若函数 $f(x)$ 满足：

（1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续　（2） $f(x)$ 在 (a,b) 内可导　（3） $f(a)=f(b)$

则一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f^{'}(\xi)=0$

3、　拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 满足：

（1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

（2） $f(x)$ 在 (a,b) 内可导

则一定存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

4、　柯西中值定理

若函数 $f(x),g(x)$ 满足:

（1）在 $[a,b]$ 上连续

（2）在 (a,b) 内可导

（3） $g'(x)\neq 0$

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}$

5、　泰勒公式

如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶导数，则当 x 在 (a,b)

内时，$f(x)$ 可以表示为 $x-x_0$ 的一个 n 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ （ξ 介于 x_0 与 x 之间).

注：在需要用到泰勒公式时，必须要搞清楚三点：

1．展开的基点；

2．展开的阶数；

3．余项的形式。

其中余项的形式，一般在求极限时用的是带皮亚诺余项的泰勒公式，在证明不等式时用的是带拉格朗日余项的泰勒公式。

而基点和阶数，要根据具体的问题来确定

6、利用中值定理解题的技巧

（1）辅助函数的构造

微分中值定理通常用来**证明一些等式、不等式及方程根的存在性**。在证明方程根的存在性和不等式时，经常要构造出一个辅助函数，辅助函数的构造方法通常有三种：**找原函数法；指数因子法；常数 k 值法。**

①、方程根的存在性

方程根的存在性，常用介值定理和罗尔定理来证明。这里着重讲解罗尔定理。下面通过例题来给出三种构造辅助函数的方法。

②、存在多个中间值的证明

有一类问题，要证明存在两个或两个以上的中间值，满足一定的等式，由于用一次中值定理只能找到一个中间值，故这类问题通常至少要用两次中值定理才能解决。

（2）非构造性的证明

有一类证明题，在证明过程中，不需要构造辅助函数，只需对原题中的函数进行讨论，称这类问题为“非构造性的证明”。

7、利用泰勒公式解题的技巧

泰勒公式常用干处理与高阶导数相关的函数的性态研究，在解题方面，通常用于证明与中间值相联系的不等式以及求函数极限。

（1）　带拉格朗日型余项的泰勒公式

本公式常用于证明与中间值相联的不等式，其关键是注意泰勒公式中展开点 x_0 的选择，通常选已知区间的端点、中间点或函数的极值点和导数为 0 的点。

这类题的特点是已知函数可导的阶数比较高（二阶以上），同时还有若干个已知的函数值或导数值。

（2）带皮亚诺型余项的泰勒公式

带皮亚诺型的泰勒公式较常用于函数极限的计算，尤其是对常规方法不好求时的极限，泰勒公式能有意想不到的作用。解题的关键是展开式中项数的确定，即展开到第几项合适。

8、 积分中值定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

三、 典型题型与例题

题型一 、与连续函数相关的问题（证明存在 ξ 使 $f(\xi)=0$ 或方程 f(x)=0 有根）

例 1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b, c_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，证明存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$f(\xi)=\frac{c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)+\cdots+c_n f(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$$

例 2、设 $b>a>0, f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、单调递增，且 $f(x)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $a^2 f(b)+b^2 f(a)=2\xi^2 f(\xi)$

例 3、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^\xi f(x)dx=\int_\xi^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)dx。$$

例 4-1、设 f(x)在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$

证明：$\exists\xi\in(0,1),\ 使\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$

例 4、设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g(\xi)\int_a^{\xi} f(x)dx = f(\xi)\int_{\xi}^{b} g(x)dx$$

例 5、 设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，且 $f(x)$ <1. 证明：$2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在(0,1)内有且仅有一个实根。

例 5-1、 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 非负连续，证明

（1）存在 $x_0\in(0,1)$，使得在 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积；

（2）又设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 可导，且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明（1）中的 x_0 是惟一的。

例 6、设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足关系式 $a_1-\dfrac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1}=0$，证明方程

$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$，在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内至少有一实根。

例 7、（0234，6 分）

设函数 $f(x)$ 、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$，利用闭区间上连续函数的性质，证明存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

题型二、 验证满足某中值定理

例 8、验证函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & x\le 1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，在[0，2]上满足拉格朗日中值定理，并求满足定理的 ξ .

题型三、 证明存在 ξ，使 $f^{(n)}(\xi)=0$ (n=1, 2, …)

例 9、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $f'_+(a)f'_-(b)<0$，证明至少存在一个 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

例 10、设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$，证明存在一个 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0$

例 11、设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内具有二阶导数且

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)}{\cos\pi x}=0,\ 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = f(2)$，证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f''(\xi)=0$

题型四、 证明存在ξ，使$G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$

（1） 用罗尔定理

1） 原函数法：

例 12、设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$g'(x) \neq 0 (x \in (a,b))$，求证存在

$\xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

例 13-1、设 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a) = f(b) = 0$，

证明：（1）对于任意的λ，$\exists \xi \in (a,b)$ 使$f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$；

（2）$\exists \eta \in (a,b)$ 使$f'(\eta) + f(\eta) \cdot g'(\eta) = 0$

例 13、（0134）设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，(0,1)内可导，且

$$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x} f(x)dx, k > 1$$

证明：在(0,1)内至少存在一点ξ, 使 $f'(\xi) = (1 - \xi^{-1}) f(\xi)$.

例 14、 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 f(a)f(b)>0,f(a)$\cdot f(\dfrac{a+b}{2}) < 0$, g(x)

在$[a,b]$上连续，试证对$\exists \xi \in (a,b)$, 使得$f'(\xi) = g(\xi) f(\xi)$..

*例 15、 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在（0，1）内一阶可导，且 $\int_0^1 f(x)dx = 0, \int_0^1 xf(x)dx = 0$.

试证：$\exists \xi \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi) = (1+\xi^{-1})f(\xi)$.

2） 常微分方程法：

例 16、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) = f(b) = \lambda$，证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\boldsymbol{f'(\xi) + f(\xi) = \lambda}$

例 17、设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 f(0)=0, f(1)=1,

证明：对任意实数 λ,必存在 $\xi \in$（0，1），使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$

(2) 直接用拉格朗日或柯西中值定理

例 18、设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{[a,b]}$ 上连续，在 $\boldsymbol{(a,b)}$ 内可导，求证存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b-a} = f'(\xi)\xi + f(\xi)$$

例 19、设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{[a,b]}$ 上连续，在 $\boldsymbol{(a,b)}$ 内可导，求证存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\boldsymbol{\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} b^n & a^n \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^{n-1}[nf(\xi) + \xi f'(\xi)], n \geq 1}$$

例 20、设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{[a,b]}$ 上连续，在 $\boldsymbol{(a,b)}$ 内可导 $\boldsymbol{(0<a<b)}$，求证存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$$

例 21、设 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{[a,b]}$ 上连续，在 $\boldsymbol{(a,b)}$ 内可导 $\boldsymbol{(0<a<b)}$，求证存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}$$

例 21-1、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$。若极限 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

（1）在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

（2）在 (a,b) 内存在 ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

（3）在 (a,b) 内存在与（2）中 ξ 相异的点 η，使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx。$$

证明：（1）因 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，故 $\lim\limits_{x\to a+}f(2x-a)=0\Rightarrow f(a)=0$

又因 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)>f(a)=0\qquad x\in(a,b)$

（2）方法一：

设 $F(x)=x^2,g(x)=\int_a^x f(t)dt(a\le x\le b)$，由柯西中值定理，于是 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt}=\frac{(x^2)'}{(\int_a^x f(t)dt)'}\Bigg|_{x=\xi}$$

即 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$ 证毕。

方法二：

设 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}=k \Rightarrow 2x=kf(x)$

$\int_a^x 2xdx=\int_a^x kf(x)dx \Rightarrow x^2-a^2=k\int_a^x f(t)dt$

令 $F(x)=x^2-k\int_a^x f(t)dt$

$F(a)=a^2, F(b)=b^2-k\int_a^b f(x)dx=b^2-(b^2-a^2)=a^2$

$\Rightarrow F(a)=F(b)$

在 $[a,b]$ 上用罗尔定理即可。

（3）因 $f(\xi)=f(\xi)-0=f(\xi)-f(a)$，

在 $[a,\xi]$ 上应用拉格朗日中值定理，知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使

$f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$

从而由（2）的结论得

$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}=\dfrac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}$；

即 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$

题型 5、 含有 $f''(\xi)$（或更高阶导数）的介值问题

例 22、 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)$，试证至少存在一个 $\xi\in(0,1)$，使

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

例 23、（012，8 分）设 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数，f(0)=0

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉氏余项的一阶麦克劳林公式。

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一个 η 使得

$$a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

例 24、 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$, $f'(0)=0$，证明: 在 $(-1,1)$ 内存在一点ξ，使得 $f'''(\xi)=3$.

题型 6、 双介值问题 $F(\xi,\eta,\cdots)=0$

例 25、例 1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$

使得 $f'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$

例 26、（051，12 分）已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$

证明：（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$

（2）存在两个不同的点 $\eta,\varsigma\in(0,1)$ 使得 $f'(\eta)f'(\varsigma)=1$

题型 7、 综合题

例 27-1、 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导， $f(0)=0, f(1)=1$，证明：对于任意的正数 m_1、m_2，存在 x_1、$x_2 \in (0,1)$，使 $\dfrac{m_1}{f'(x_1)}+\dfrac{m_2}{f'(x_2)}=m_1+m_2$

证明：只需证 $\dfrac{\frac{m_1}{m_1+m_2}}{f'(x_1)}+\dfrac{\frac{m_2}{m_1+m_2}}{f'(x_2)}=1,$ 由于 $0<\dfrac{m_1}{m_1+m_2}<1$

故由介值定理，$\exists \xi \in (0,1)$，使 $f(\xi)=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$, 从而 $\dfrac{m_2}{m_1+m_2}=1-f(\xi)$

下面只需证明 $\dfrac{f(\xi)}{f'(x_1)}+\dfrac{1-f(\xi)}{f'(x_2)}=1$

由拉格朗日中值定理，$\exists x_1 \in (0,\xi) \subset (0,1),\ \exists x_2 \in (\xi,1) \subset (0,1)$

使 $\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=f'(x_1)$ 及 $\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=f'(x_2)$ 即 $\dfrac{f(\xi)}{f'(x_1)}=\xi$ 及 $\dfrac{1-f(\xi)}{f'(x_2)}=1-\xi$

从而 $\dfrac{f(\xi)}{f'(x_1)}+\dfrac{1-f(\xi)}{f'(x_2)}=\xi+(1-\xi)=1$

例 27、（011，7 分）

设函数 $f(x)$ 在（-1,1）内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，试证

（1） 对于(-1,1)内的任意 $x\neq 0$,存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$ 使得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x) \text{ 成立}$$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

例 28、试证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\left|f''(\xi)\right|\geq\dfrac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$

*例 29、设 e<a<b，求证：在 (a,b) 内存在唯一的点 ξ，使得

$$\begin{vmatrix} a & e^{-a} & \ln a \\ b & e^{-b} & \ln b \\ 1 & -e^{-\xi} & \dfrac{1}{\xi} \end{vmatrix} = 0$$