

第四讲 无穷级数

1. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n + \frac{1}{n})^n}.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n}.$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{[\ln(1+n)]^n}.$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}.$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\ln n}{n})^n.$$

2. 讨论级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots$ 的敛散性.

3. 设 $a_n > 0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$ 的敛散性, 若收敛, 是条件收敛还是绝对收敛.

4. 设 $a_n = \int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx$, 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 的敛散性.

5. 设 $a_n = \int_n^{n+1} \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^2} dx$, 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n a_{n+1}|$ 都收敛.

7. 设 $a_n > 0, b_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 证明: ① 若 $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \leq 0, n = 1, 2, \cdots$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散; ② 若 $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta > 0$ (δ 为常数), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

8. 设 $a_n \neq 0 (n = 1, 2, \cdots)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a \neq 0)$. 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}|$ 同敛散.

9. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$ 的收敛半径、收敛域与和函数.

10. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{3n}) (\frac{3+x}{3-2x})^n$ 的收敛域.

11. 求 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

12. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$, $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$, 求证: 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛, 并求其和.
13. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n}$ 收敛, 并求其和.
14. 将 $f(x) = \ln \frac{x}{1+x}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数, 并指明收敛域.