

上海财经大学浙江学院

2012 年高等数学竞赛辅导练习题

(极限部分历年试题)

1. (02年) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}$.
2. (03数,工,经,文) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(xt)^2 dt}{x^5}$.
3. (03经) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$.
4. (04数) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + a^{2n}}$, 其中 a 为常数.
5. (04工,文) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^t \cos t dt - x - \frac{x^2}{2}}{(x - \tan x)(\sqrt{x+1} - 1)}$.
6. (04经) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - ax - b) = 0$, 求常数 a, b .
7. (05数,工) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t \ln(1+t) dt - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8}}{(x - \sin x)(e^{x^2} - 1)}$.
8. (05经) 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{5}}{3} \right)^n$.
9. (05文) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n$.
10. (06数) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2}{(2n)^3} - \frac{1}{6} \right]$.
11. (06工,经) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - e^x \right]$.
12. (06经,文;同04经试题) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - ax) = b$, 求常数 a, b .
13. (06文) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(2-x)e^{\frac{1}{x}} + x \right]$.
14. (07数,工) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$.
15. (07数,工,经) 设 $u_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \dots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}$, $v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}$, 求: (1) $\frac{u_{10}}{v_{10}}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
16. (07经) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} - e}{\ln(1+x)}$.
17. (07文) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \sin \frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.
18. (07文) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - \sqrt[3]{1-x^3} - ax - b) = 0$, 求 a, b .

19. (08数,工,经,文) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{3} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$.
20. (08数,工,经) 已知 $a_1 > 0, a_2 > 0$.
- (1) 若存在数列 $\{y_n\}$ 满足条件:
- (a) $y_n > 0$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$;
- (c) $y_n = a_1 y_{n+1} + a_2 y_{n+2}, n = 1, 2, 3, \dots$
- 证明: $a_1 + a_2 > 1$.
- (2) 若 $a_1 + a_2 > 1$, 证明存在满足条件 (a),(b),(c) 的数列 $\{y_n\}$.
21. (08文) 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{n}} + \frac{1}{n+\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n \cdot n}} \right)$.
22. (09数,工) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(2n)!}{n!} \right]^{\frac{1}{n}}$.
23. (09工,经) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[e^x + \frac{ax^2 + bx}{1-x} \right]^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 求常数 a, b .
24. (09经) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(n+i)}$.
25. (09文) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{i=1}^n i \sin \frac{i\pi}{n}$.
26. (09文) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [e^x + ax^2 + bx]^{\frac{1}{x^2}} = 1$, 求常数 a, b .
27. (10数,工) 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + \frac{1}{2} \right]^{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}}$.
28. (10数,工,经,文) 定义数列 $\{a_n\}$ 如下: $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \int_0^1 \max\{a_{n-1}, x\} dt, n = 2, 3, 4, \dots$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
29. (10经) 求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right]^n$.
30. (10文) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x))^2 = 1$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x)$.